

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

## **Кваліфікаційна робота**

(освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр)

на тему «*Стійкість граничних циклів*»

Виконав: студент групи МП41 IV курсу  
(перший бакалаврський рівень),

спеціальності 113

Прикладна математика

освітньої програми

Прикладна математика

**Татаренко В. В.**

Керівник: к.ф.-м.наук, доцент кафедри  
прикладної математики

**Макаров О. А.**

Рецензент: доктор технічних наук,

професор

**Стрельнікова О. О.**

Харків - 2024 рік

## Анотації

### **Татаренко В.В. Стійкість граничних циклів.**

В кваліфікаційної роботі досліджуються на стійкість граничні цикли на площині, з'ясовується зв'язок орбітальної стійкості цикла зі стійкістю за Ляпуновим. Наведені приклади граничних циклів та дослідження на їх стійкість.

Докладно розглянуто нелінійний *осцилятор* та дослідження умов, за якими він має стійкий граничний цикл.

Крім того, розглянуто *брюселятор* - важлива математична модель хімічної кінетики і теж наведені умови існування стійкого граничного циклу.

### **Tatarenko V.V. Stability of limit cycles.**

In qualified work, the stability of limit cycles on a plane is examined, and the connection between the orbital stability of the cycle and the stability of Lyapunov is identified. We focus the applications of limit cycles and investigate their stability.

The nonlinear oscillator and the investigation of minds behind which there is a stable limit cycle are thoroughly examined.

In addition, the Brusselator is considered - an important mathematical model of chemical kinetics and also induction of a stable limit cycle.

## Зміст

Анотації

Вступ

1. Дослідження граничних циклів на стійкість .....	4
2. Ламповий генератор .....	10
3. Брюселятор .....	16
Висновки .....	18
Список використаних джерел .....	19

## Вступ

Цикл – це замкнута траєкторія або орбіта, якою динамічна система може слідувати у своєму фазовому просторі. Іншими словами, це періодичні розв’язки диференціальних рівнянь, у яких система повертається до початкового стану через певний проміжок часу. Ці розв’язки часто зустрічаються у фізиці та математиці при вивченні систем, які виявляють коливальну поведінку.

*Граничним циклом* називається такий цикл, в деякому околі якого немає інших циклів.

Граничні цикли важливі в математиці, оскільки вони можуть дати розуміння довгострокової поведінки динамічної системи. Наприклад, існування граничного циклу може означати, що система продовжуватиме коливатися нескінченно довго, не наближаючись до будь-якого конкретного стану. Крім того, граничні цикли можуть допомогти нам зрозуміти властивості стійкості системи. Зокрема, якщо граничний цикл стійкий, то невеликі збурення системи призведуть до того, що вона знову зійде до граничного циклу.

У фізиці граничні цикли важливі, оскільки вони можуть описувати поведінку багатьох природних систем, наприклад рух небесних тіл, поведінку електричних кіл і динаміку хімічних реакцій. Наприклад, граничний цикл коливань маятника вперед і назад можна використовувати для моделювання поведінки ряду коливальних явищ, від руху метронома до коливань гітарної струни.

Загалом, граничні цикли є потужним інструментом для розуміння поведінки динамічних систем у математиці та фізиці. Характеризуючи довгострокову поведінку системи та її властивості стійкості, вони дозволяють нам робити прогнози щодо поведінки цих систем з часом.

Дослідження граничних циклів на площині включає дослідження поведінки динамічних систем, визначених звичайними диференціальними рівняннями.

В цій кваліфікаційній роботі, наряду з оглядом теорії граничних циклів на стійкість, наведені дві популярні в фізиці моделі – *нелінійний осцилятор*, а в хімії – *брюселятор*.

## 1. Дослідження граничних циклів на стійкість

Математична модель, яка використовується для дослідження граничних циклів на площині, являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

де  $x$  і  $y$  — змінні стану системи, а  $f(x, y)$  і  $g(x, y)$  — функції, які описують швидкість зміни  $x$  і  $y$  відносно часу. Ця система також відома як двовимірний динамічний систем.

Поведінка системи аналізується шляхом вивчення критичних точок (або точок спокою), які є точками, де  $\frac{dx}{dt} = 0$  і  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Стійкість критичних точок визначається власними значеннями матриці Якобі, обчисленими в критичних точках. Якщо всі власні значення мають від'ємні дійсні частини, критична точка є стійким вузлом і траєкторії у фазовому просторі сходяться до нього. Якщо всі власні значення мають додатні дійсні частини, критична точка є нестійким вузлом і траєкторії у фазовому просторі розходяться від нього. Якщо одне власне значення додатне, а інше від'ємне, критична точка є сідловою точкою, і траєкторії у фазовому просторі або наближаються, або віддаляються від неї залежно від напрямку траєкторій.

Якщо матриця Якобі має комплексні власні значення з ненульовими уявними частинами, критична точка буде фокусом.

Граничний цикл називається *стійким*, якщо будь-яка траєкторія, яка починається в околі цього циклу, наближається до нього.

**Теорема Бендіксона.** Якщо в компактній області  $2K \subset Y$  немає точок спокою даної автономної системи і всі траєкторії не виходять з компактної області  $K$ , то в цьому компактній області є хоча б один стійкий цикл, (див. [1, 4]).

**Принцип кільця (наслідок теореми Бендіксона),** (див. [2])

Якщо на фазовій площині існує кільце  $r_1^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r_2^2$ , таке, що всі розв'язки системи, що починаються на межі цього кільця, входять всередину кільця або всі виходять з кільця, то всередині цього кільця є граничний цикл цієї системи.

Якщо існує на фазовій площині деяка замкнута область, така, що всі фазові траєкторії, що перетинають межу цієї області, входять в неї, і всередині цієї області знаходиться нестійке положення рівноваги, то в цій області обов'язково існує хоча б один граничний цикл, (див. [4], с. 100).

Розв'язок  $\vec{\varphi}(t)$  нормальної системи  $\vec{y}' = f(t, \vec{y})$  називається **стійким за Ляпуновим** (стійким) при  $t \rightarrow +\infty$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  таке, що для будь-якого розв'язку  $\vec{y}(t)$  нормальної системи такого, що  $|\vec{y}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)| < \delta(\varepsilon)$  виконується нерівність  $|\vec{y}(t) - \vec{\varphi}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ , тобто близькі за початковими значеннями розв'язки залишаються близькими для всіх  $t \geq t_0$ .

Порівняємо означення стійкого циклу з означенням стійкого за Ляпуновим розв'язку.

### Характеристичні показники

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x \quad (a)$$

де  $n \times n$  - мірна матриця  $A(t)$  неперервна для  $t \in R$  і задовольняє умові

$$A(t + \omega) = A(t), \quad \omega > 0, \quad t \in R.$$

Така матриця  $A(t)$  називається періодичною з періодом  $\omega$ , або  $\omega$  - періодичною.

### **Теорема (Флоке-Ляпунова)**

Довільну фундаментальну матрицю системи (а) можна подати у вигляді

$$\Phi(t) = G(t)e^{tM}$$

де  $G(t) \in n \times n$  - мірна  $\omega$ -періодична матриця,  $M \in n \times n$  - мірна постійна матриця.

Нехай  $\Phi(t)$  – фундаментальна матриця системи (а).

Покажемо, що матриця  $\Psi(t) = \Phi(t + \omega)$  – також фундаментальна матриця системи (а).

$$\dot{\Psi} = \dot{\Phi}(t + \omega) = A(t + \omega)\Phi(t + \omega) = A(t)\Phi(t + \omega) = A(t)\Psi(t)$$

Крім того, матриця  $\Psi(t)$  є невиродженою  $\forall t \in R$ , оскільки  $\Phi(t)$  невироджена.

За властивістю фундаментальної матриці, існує не вироджена  $n \times n$  - мірна матриця  $B$  така, що

$$\Phi(t + \omega) = \Phi(t)B.$$

Постійна матриця  $B$ , яка визначається цією формулою, називається **матрицею монодромії**. Вона визначається за допомогою фундаментальної матриці  $\Phi(t)$ , яка не є єдиною. Тому й матриця монодромії не єдина.

### **Означення:**

Власні числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  матриці монодромії називають мультиплікаторами системи (а), власні числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матриці  $M$  називаються характеристичними показниками.

Таким чином,  $\lambda_i = \frac{1}{\omega} \ln \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  і при цьому простим мультиплікаторам відповідають прості характеристичні показники, а кратним мультиплікаторам – кратні характеристичні показники.

### **Теорема Андронова-Вітга.**

Нехай

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

– векторний запис довільної нормальної системи рівнянь порядку  $n$ , праві частини якої разом з їх похідними  $\frac{\partial f^i(t,x)}{\partial x}$  визначені і неперервні на відкритій множині  $\Gamma$  простору змінних  $t, x$ . Розв'язок рівняння (1) з початковими значеннями  $\theta, \epsilon$  позначимо через  $\varphi(t, \theta, \epsilon)$ .

Нижче будемо розглядати системи (1), праві частини яких залежать від  $t$  періодично з періодом  $\tau$

$$f(t + \tau, x) = f(t, x). \quad (*)$$

Для того, щоб вивчити поведінку розв'язків рівняння (1) поблизу розв'язку  $\varphi(t)$  введемо нову невідому векторну функцію  $y$ , поклавши

$$x = \varphi(t) + y. \quad (2)$$

Вважаючи, що праві частини системи (1) мають на множині  $\Gamma$  другі неперервні похідні по координатам вектора  $x$ . Зробивши в системі (1) заміну змінних (2), приймаючи до уваги, що  $\varphi(t)$  є розв'язком рівняння (1) і розкладаючи праві частини по  $y$ , отримуємо:

$$\dot{y}^i = \sum_j \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j} y^j + r^i(t, y) \quad (3)$$

Лінеаризуючи цю систему, тобто відкидаючи члени  $r^i$  другого порядку малості відносно  $y$ , отримуємо лінійну систему:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (4)$$

де  $A(t)$  – матриця з елементами  $a_j^i(t) = \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j}$ .

Тепер будемо вважати, що права частина рівняння (1) – періодична по  $t$  з періодом  $\tau$  (див.(\*)) і що розв'язок  $\varphi(t)$  – також періодичний (теж з періодом  $\tau$ ). При цих припущеннях лінійна система (4) буде періодичною з періодом  $\tau$

$$a_j^i(t + \tau) = a_j^i(t) \quad i, j = 1, \dots, n,$$



тож можна говорити про її характеристичні числа. У випадку, коли система (1) автономна, а її періодичний розв'язок  $\varphi(t)$  відмінний від положення рівноваги, лінійна система (4) обов'язково має одне характеристичне число рівне одиниці.

**Теорема Андронова-Вігта.** *Нехай рівняння (1) автономне і  $\varphi(t)$  – його періодичний розв'язок періода  $\tau$ , відмінний від положення рівноваги. Якщо характеристичне число рівняння (4), рівне одиниці, має кратність один, а всі інші характеристичні числа рівняння (4) по модулю менші ніж 1, то розв'язок  $\varphi(t)$  стійкий по Ляпунову.*

**Наслідок** (для  $n=2$ ):

Якщо виконана умова  $\int_0^\tau \text{tr}(A)dt < 0$ , то розв'язок  $x=\varphi(t)$  буде стійким.

**Доведення.**

Скористаємося формулою Ліувіля-Остроградського для визначника Вронського

$$W(t) = W(0) \exp \int_0^t \text{tr}A(\xi) d\xi.$$

Оскільки  $W(0)=1$ , то  $W(\tau) = \exp \int_0^\tau \text{tr}A(\xi) d\xi < 1$  (якщо виконана умова Наслідку).

А, оскільки визначник  $W(\tau) = \mu_1\mu_2$ , при цьому мультиплікатор  $\mu_1 = 1$ , тоді  $0 < \mu_2 < 1$ . Отже, періодичний розв'язок  $x=\varphi(t)$  буде стійким за Ляпуновим.

**Приклад 1.**

$$\begin{cases} \dot{x} = x \sin(x^2 + y^2) - y \\ \dot{y} = y \sin(x^2 + y^2) + x \end{cases}$$

Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} x\dot{x} = x^2 \sin(x^2 + y^2) - xy \\ y\dot{y} = y^2 \sin(x^2 + y^2) + xy \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2), \text{ тобто } \frac{d}{dt}(r^2) = 2r^2 \sin(r^2)$$

$$\text{Або } \dot{r} = r \sin r^2.$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = x^2 + y^2, \text{ тобто } \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = dt \text{ або } d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = dt.$$

Тоді  $\varphi = t + c$ .

Перше рівняння має розв'язок  $r = \sqrt{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Значить, замкнуті траєкторії – кола радіусів  $r = \sqrt{k\pi}$  та точка спокою –  $(0,0)$ . Оскільки при  $0 < r < \sqrt{\pi}$  при  $\sin r^2 > 0$ , то траєкторія віддаляється від початку координат та наближається до кола радіусу  $r = \sqrt{\pi}$ . Тому точка спокою  $(0,0)$  є нестійким фокусом, а цикл  $r = \sqrt{\pi}$  – стійким циклом.

Аналогічно цикли  $r = \sqrt{(2k+1)\pi}$  є стійкими, а цикли  $r = \sqrt{2k\pi}$  – нестійкими.

Досліджуємо на стійкість за Ляпуновим цикли  $\begin{cases} x = \sqrt{k\pi} \cos(t) \\ y = \sqrt{k\pi} \sin(t) \end{cases}$ .

Запишемо матрицю Якобі цієї системи:

$$I = \begin{pmatrix} 2x^2 \cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2) & 2xy \cos(x^2 + y^2) - 1 \\ 2xy \cos(x^2 + y^2) + 1 & 2y^2 \cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

При  $x^2 + y^2 = k\pi$ :

$$I = \begin{pmatrix} k\pi \cos k\pi \cdot \cos^2 t & 2k\pi \cos t \sin t \cdot \cos k\pi - 1 \\ 2k\pi \cos t \sin t \cdot \cos k\pi + 1 & k\pi \cos k\pi \cdot \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Перевіримо умову наслідку:

$$\int_0^\pi 2k\pi \cos k\pi dt < 0 \text{ при непарних } k$$

Отже, розв'язки  $\begin{cases} x = \sqrt{k\pi} \cos(t) \\ y = \sqrt{k\pi} \sin(t) \end{cases}$  будуть стійкими за Ляпуновим при непарних  $k$ .

## Приклад 2.

З'ясувати, чи має граничний цикл система  $\begin{cases} \dot{x} = -y + x - x^3 \\ \dot{y} = x + y - y^3 \end{cases}$

### Розв'язок.

$$\text{Оскільки } \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-y + x - x^3) + 2y(x + y - y^3) = 2(x^2 + y^2) - 2(x^4 + y^4)$$

то, перейшовши до полярних координат, отримаємо рівняння

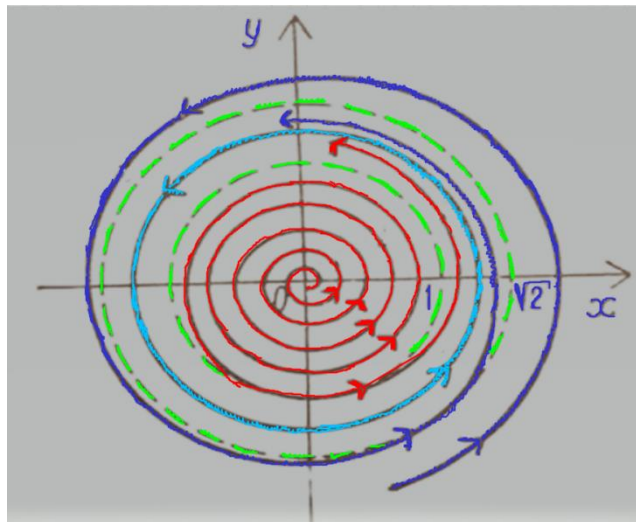
$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2r^2 - 2r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi).$$

Так як  $\frac{1}{2} \leq \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi \leq 1$ , то

$$\text{при } r < 1 \quad 0 < 2r^2(1 - r^2) < \frac{d}{dt}(r^2),$$

$$\text{а при } r > \sqrt{2} \quad 0 > 2r^2 - r^4 > \frac{d}{dt}(r^2).$$

Тому всі траєкторії накручуються на кільце з радіусом  $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ , а значить, у цьому кільці є стійкий граничний цикл.



Запишемо матрицю Якобі цієї системи:

$$I = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 & -1 \\ 1 & 1 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$\text{tr} I = 2 - 3r^2 < -1$ , оскільки цикл знаходиться в кільці  $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ .

Тому даний цикл стійкий по Ляпунову в силу наслідку з теореми Андронова-Вітта.

## 2. Ламповий генератор

Лампові генератори, як ключовий елемент електронних систем, відіграють невід'ємну роль у сучасній радіоелектроніці та телекомунікаціях. Їхні принципи роботи та функціональні можливості зробили їх популярними

середньовольтними джерелами високочастотного струму. Лампові генератори відзначаються надійністю, довговічністю та високою стабільністю, що робить їх особливо важливими для застосувань, де вимагається точна генерація сигналів, таких як радіопередавачі, приймачі, радары, акустичні системи і багато інших.

Актуальність дослідження лампових генераторів пояснюється тим, що вони досі використовуються в багатьох сучасних технологічних застосуваннях, незважаючи на те, що в останні десятиліття їхню роль в певних галузях зменшила поява напівпровідникових інтегральних схем. Проте, розуміння їхньої роботи, динаміки та можливостей залишається надзвичайно важливим завданням для інженерів та дослідників, див. [6].

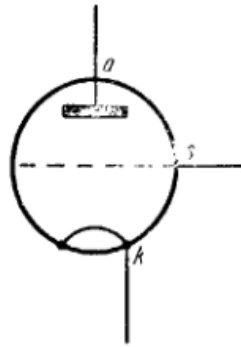
Мета даного розділу – вивчити та проаналізувати основні аспекти лампових генераторів, зосереджуючись на математичних моделях та диференціальних рівняннях, що описують їхню роботу. Дослідження розкриє основні принципи функціонування лампових генераторів та дозволить розглянути їхні можливості та обмеження. Особлива увага буде приділена граничним циклам та стійкості роботи лампового генератора, що є важливим аспектом для розуміння його характеристик.

Тут схематично буде описано пристрій найпростішого лампового генератора – приладу, що є джерелом періодичних (незагасаючих) електричних коливань. Буде дана якісна математична теорія роботи генератора. Рівняння, що описує роботу лампового генератора. Його граничний цикл відповідає періодичним коливанням, збуджуваним генератором.

Адекватність математичного поняття граничного циклу та фізичного поняття незагасаючого коливання, що збуджується ламповим генератором, була вперше встановлена видатним вченим А. А. Андроном.

## Тріод

Тріод (один з видів електронної лампи) представляє собою триполюсник  $aks$ . Умовне зображення тріода показано на рис.



Тут  $a$  – анод,  $k$  – катод,  $s$  – сітка. Між полюсами  $s$  і  $k$  подається різниця напруги  $U_s$  (сіткова напруга), однак струм між полюсами  $s$  і  $k$  відсутній; від полюса  $a$  до полюса  $k$  через лампу тече струм  $I_a$  (анодний струм). Закон, що описує роботу тріода, має вигляд

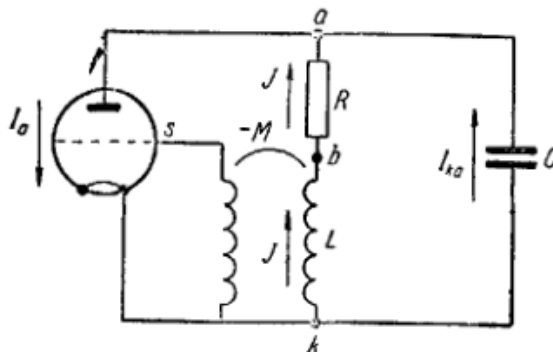
$$I_a = f(U_a) \quad (1)$$

Функція  $f$  називається характеристикою тріода. Ми вважатимемо, що вона є монотонно зростаючою та позитивною і задовольняє умовам:

$$\lim_{U_s \rightarrow -\infty} f(U_s) = 0,$$
$$\lim_{U_s \rightarrow +\infty} f(U_s) = I_N,$$

де  $I_N$  – струм насичення тріода. Зазвичай, припускають також, що максимум функції  $f'(U_s)$  досягається в точці  $U_s = 0$ .

Ламповий генератор з коливальним контуром в анодному ланцюзі має наступний пристрій:



Він має чотири вузли  $a, k, s, b$  і складається з тріода  $aks$  з характеристикою  $f(U_s)$ , конденсатора  $ak$  з ємністю  $C$ , опору  $ab$  величини  $R$ , індуктивності  $bk$  величини  $L$  і ще однієї індуктивності  $sk$ , величина якої немає значення.

Індуктивності  $kb$  і  $ks$  пов'язані від'ємною взаємоіндукцією  $-M$  ( $M > 0$ ), яка здійснює так званий зворотний зв'язок в ламповому генераторі. Якщо позначити через  $J$  силу струму, що йде через опір  $ba$ , або (що те саме), через індуктивність  $kb$ :

$$J = I_{ba} = I_{kb},$$

то виявляється, що величина  $J$ , як функція часу  $t$ , задовольняє наступному диференційному рівнянню:

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{J}{C} = \frac{1}{C}f(MJ) \quad (2)$$

Рівняння (2) в фазовій площині змінних  $J, \dot{J}$  має єдине положення рівноваги з координатами

$$J = f(0), \dot{J} = 0 \quad (3)$$

Лінійне наближення рівняння (2) має вигляд

$$L\ddot{J} + \left(R - \frac{M}{C}f'(0)\right)\dot{J} + \frac{J}{C} = 0.$$

Його характеристичне рівняння  $L\alpha^2 + \left(R - \frac{M}{C}f'(0)\right)\alpha + \frac{1}{C} = 0$ .

Це положення рівноваги асимптотично стійке, якщо

$$R > \frac{M}{C}f'(0) \quad (4)$$

і нестійке, якщо

$$R < \frac{M}{C}f'(0) \quad (5)$$

Покажемо, що при належному виборі характеристики  $f$  рівняння (2) має єдиний граничний цикл, а всі інші траєкторії рівняння (2), відмінні від положення рівноваги (3), намотуються на нього.

Введемо замість невідомої функції  $J$  нову невідому функцію  $x$ , поклавши:

$$J = x + f(0)$$

з тим щоб точці (3) відповідав початок координат площини  $x, \dot{x}$ .

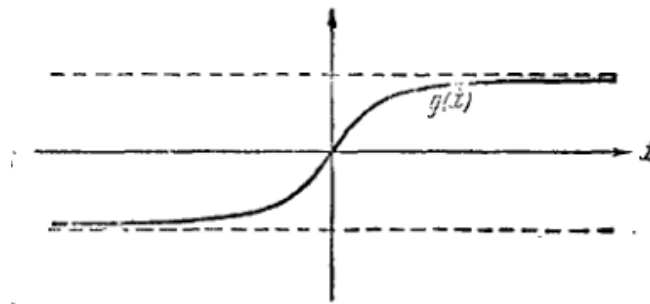
Зробивши цю підстановку, отримуємо з рівняння (2) рівняння:

$$\ddot{x} + \frac{R}{L}\dot{x} + \frac{1}{LC}x = \frac{1}{LC}[f(M\dot{x}) - f(0)]. \quad (6)$$

Функцію змінної  $\dot{x}$ , яка стоїть в правій частині даного рівняння, позначимо через  $g(\dot{x})$ .

Видно, що функція  $g$  є обмеженою, монотонно зростаючою і обертається в нуль тільки при нульовому значенні аргумента.

Графік характеристики триода має вигляд:



Вважаючи понад те що  $\frac{R}{L} = 2\delta$ ,  $\frac{1}{LC} = \omega^2$ , ми запишемо рівняння (6) у вигляді

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2x = g(\dot{x}).$$

Вводячи нову змінну  $y = \dot{x}$ , ми з цього рівняння отримуємо нормальну систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2x - 2\delta y + g(y) \end{cases} \quad (7)$$

І завданням даного дослідження буде доведення того, що в даній системі існує стійкий граничний цикл.

**Теорема.** *Існує характеристика  $g(y)$ , при якій система (7) має стійкий граничний цикл.*

**Доведення.**

Візьмемо  $g(y) = \delta \operatorname{arctg}(y)$ .

Покажемо, що при такій функції  $g(y)$  існує стійкий граничний цикл.

Розглянемо еліпс

$$\omega^2x^2 + y^2 = R^2 \quad (8)$$

Зовнішня нормаль: 
$$\vec{n} = (\omega^2 x; y) / \sqrt{\omega^4 x^2 + y^2}$$

Розглянемо кут між траєкторіями і нормаллю :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \omega^2 xy - \omega^2 yx - 2\delta y^2 + yg(y) = -2\delta y^2 + \delta y \cdot \arctg(y) \quad (9)$$

Помітимо, що  $-2\delta y^2 + \delta y \cdot \arctg(y) < 0$  при  $|y| > \frac{\pi}{4}$ .

Тобто, траєкторії входять в середину еліпса (8).

Якщо розглянути еліпс (8) з достатньо малим  $r$ , то

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -2\delta y^2 + \delta y \cdot \arctg(y) \geq 0,$$

тобто траєкторії виходять з даного еліпса.

Тоді по принципу кільця, всередині області

$$r < \omega^2 x^2 + y^2 < R$$

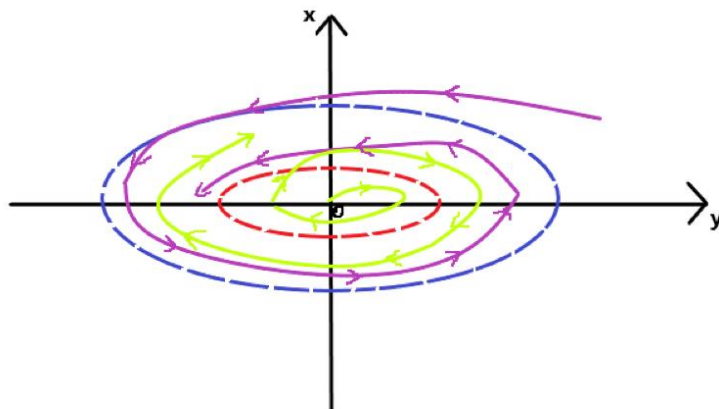
існує граничний цикл.

Дослідимо його на стійкість.

За наслідком із теореми Андронова-Вітта:

$$\int_0^T \text{tr} A(t) dt = \int_0^T (-2\delta + g'(y)) dt = \int_0^T \left(-2\delta + \frac{\delta}{1+y^2}\right) dt < 0.$$

Тобто граничний цикл є стійким при заданій характеристиці  $g(y) = \delta \arctg(y)$ .





### 3. Брюселятор

У сучасному науковому дослідженні важливу роль відіграє аналіз динамічних систем та їхніх властивостей, зокрема стійкості граничних циклів, які відображають особливості розвитку біологічних систем. Особливу увагу приділяється вивченню рівнянь, що описують класичні приклади автоколивань, враховуючи їхню роль у системах хімічних реакцій.

Серед таких рівнянь виділяється модель "Брюселятор", яка відображає процеси, що відбуваються в хімічних реакціях та взаємодії між різними хімічними сполуками. Цей приклад становить важливий об'єкт для дослідження, оскільки він ілюструє класичний сценарій існування автоколивань у системах, що виникають в біологічних та хімічних процесах.

"Брюселятор" – це математична модель, яка використовується для опису хімічних реакцій та взаємодій між хімічними сполуками в системі. Назва моделі походить від того, що вона була вперше запропонована у 1920-х роках бельгійським фізико-хіміком Жаком Ж. Вант Гофтом (Jacques J. Van de Graaff) у контексті дослідження кінетики хімічних реакцій.

Основною ідеєю "Брюселятора" є моделювання концентрацій реакційних компонентів як функцій часу, з врахуванням взаємодії між ними. Реакції можуть включати як каталізатори, так і інші реагенти, що взаємодіють у складний спосіб. Важливою особливістю "Брюселятора" є наявність автокаталізу, коли продукти реакції впливають на її хід, сприяючи подальшій реакції. «Брюселятор» грає роль базової моделі в хімічній і біологічній кінетиці, таку ж як гармонічний осцилятор в фізиці, (див. [5]).

Математично модель описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A + x^2 y - (B+1)x \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2 y, \end{cases}$$

де  $A$  і  $B$  – вихідні речовини, а  $x(t)$  і  $y(t)$  – проміжні речовини .

Дана система має одну стаціонарну точку:  $x_0 = A, y_0 = \frac{B}{A}$ .

Матриця Якобі в цій точці:

$$J = \begin{pmatrix} 2xy - (B + 1) & x^2 \\ B - 2xy & -x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B - 1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix},$$

отримуємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + (A^2 - B + 1)\lambda + A^2B = 0.$$

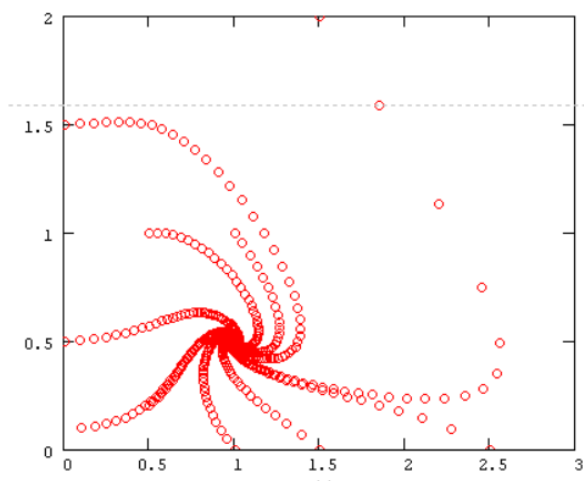
Критерієм асимптотичної стійкості стаціонарної точки буде умова

$$A^2 - B + 1 > 0 \Rightarrow B < A^2 + 1.$$

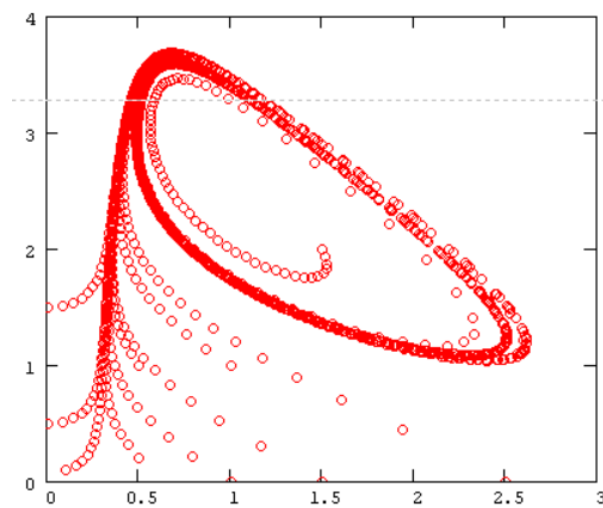
Отже, в даному випадку точка буде стійким фокусом, а граничних циклів немає (див. [5]).

Якщо  $B > A^2 + 1$  стаціонарна точка буде нестійким фокусом і існує стійкий граничний цикл (див. [5]).

Як ілюстрацію розглянемо фазовий портрет бруселятора для випадків  $A=1, B=0,5$  та  $A=1, B=2,5$ .



Фазовий портрет Брюселятора  
при  $A=1; B=0,5$



Фазовий портрет Брюселятора  
при  $A=1; B=2,5$

## Висновки

У рамках нашого дослідження ми провели аналіз граничних циклів на площині, використовуючи методи динамічних систем та звичайних диференціальних рівнянь. Особливу увагу було приділено вивченню лампового генератора та брюселятора, двох різних систем, які можуть бути знайдені в різних галузях науки та техніки.

Граничні цикли є важливими для розуміння поведінки динамічних систем. Вони можуть виникати у різних наукових дисциплінах, таких як фізика, біологія, екологія, економіка та інші. Розуміння і аналіз граничних циклів дозволяє прогнозувати стійкість систем, визначати точки рівноваги та вивчати їхні властивості.

Ламповий генератор і брюселятор слугують прикладами динамічних систем у різних галузях. Вивчення їх граничних циклів має важливість для покращення роботи та оптимізації таких систем, а також може мати практичні застосування в розробці нових технологій та управління процесами.

Отже, наше дослідження сприяло розширенню загального розуміння граничних циклів у динамічних системах та їхнього значення у різних наукових галузях. Ці знання можуть бути корисними для подальших досліджень та застосувань у великому спектрі наукових інтересів.

## Список використаних джерел

1. Hartman Ph. Ordinary differential equations. / JOHN WILEY & SONS, New York-London-Sydney, 1964. - 720 p.
2. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. - 600 с.
3. Хусаїнов Д. Я., Шатирко А. В. Основи нелінійної динаміки: Посібник для студентів спеціальності "Прикладна математика". – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. – 159 с.  
[http://csc.knu.ua/media/filer\\_public/6c/11/6c11b5e3-2d42-484c-9690-3ca5cace035f/osnovi\\_neliniinoyi\\_dinamiki.pdf](http://csc.knu.ua/media/filer_public/6c/11/6c11b5e3-2d42-484c-9690-3ca5cace035f/osnovi_neliniinoyi_dinamiki.pdf)
4. Швець О.Ю. Динамічні системи. Конспект лекцій. – К.: Київ НТУУ "КПІ", 2018. – 148 с. <http://chaos.kpi.ua/images/stories/DS-2020.pdf>
5. Matthew P. McDowell, Joseph M. Powers. Mathematical Modeling of the Brusselator. /Department of Aerospace and Mechanical Engineering. University of Notre Dame. University of Notre Dame, 2008. – 15 p.
6. Ginoux J.-M., Letellier C. Van der Pol and the history of relaxation oscillations: toward the emergence of a concept. Препрінт, ArXiv.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.4890>